Fonction logarithme : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Savoir calculer avec des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln 6 - \ln 2$ b) $\ln e^2$ c) $\ln \dfrac{1}{e^x}$ d) $e^{\ln 4}$

e) $e^{2\ln 5}$ f) $e^{-\ln 3}$ g) $\ln \sqrt{e}$ h) $\ln\left(e^{-x}\right)$

Résoudre des équations avec des logarithmes et exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln x = 4$ b) $\ln(2-x) = 0$ c) $\ln x = -1$

d) $e^{3-2x} = 5$ e) $2e^x + 10 = 6$ f) $2\ln x + 6 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(2x+1) + \ln x = 0$ b) $\ln(2-x) - 2\ln x = 0$ c) $\ln\left(x^2\right) = (\ln x)^2$

Équation avec des logarithmes - Piège classique !

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$.
Clara affirme que cette équation admet deux solutions. A-t-elle raison ? Justifier.

Résoudre des inéquations avec des logarithmes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(-x) < 2$ b) $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) - \ln x \geq 0$ c) $(\ln x)^2 + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :
a) $\ln(3-x) \leq -2$ b) $\ln(\ln x) < 0$

Résoudre des inéquations avec des exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{-x} > 2$ b) $4 - e^{3x} \geq 0$ c) $e^{1-x} - 2 \leq 0$ d) $e^{2x} - 2e^x \geq 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(x+1) \times \ln(2-x) = 0$ b) $\ln(x+1) \times \ln(2-x) \geq 0$ c) $\ln x + \ln(3x+2) > 0$

Résoudre des équations avec des logarithmes en utilisant un changement d'inconnue

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $X^2 + X - 6 = 0$
2) En déduire les solutions des équations suivantes :
a) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ b) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

Signe d'une expression avec des logarithmes

Déterminer le signe des expressions suivantes sur l'intervalle I indiqué :

a) $1 - \ln x$ et $I =]0; +\infty[$ b) $\ln(1-x)$ et $I =]-\infty; 1[$ c) $\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$ et $I =]0; +\infty[$

Étudier une fonction avec des logarithmes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$.
2) Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1) Justifier que f est bien définie sur $]1;+\infty[$.
2) Justifier que f est dérivable sur $]1;+\infty[$ puis déterminer, pour tout x de $]1;+\infty[$, $f'(x)$.
3) Déterminer le tableau de variations de f sur $]1;+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$.

1) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis déterminer, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$.
2) Déterminer le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

Dans chaque cas :

1) Justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I indiqué.
2) Déterminer la dérivée de f et le tableau de variations de f sur I.

a) $f(x)=\ln(1-e^x)$ et I$=]-\infty;0[$ b) $f(x)=\ln\dfrac{2}{x}$ et I$=]0;+\infty[$ c) $f(x)=\ln(1+e^x)$ et I$=\mathbb{R}$

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de f et le tableau de variations de f sur l'intervalle I indiqué.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$ et I$=]0;+\infty[$ b) $f(x)=x\ln x$ et I$=]0;+\infty[$
c) $f(x)=\ln(x^2-6x+10)$ et I$=\mathbb{R}$ d) $f(x)=x^2+5x-3\ln x$ et $I=]0;+\infty[$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-3x+1$.
Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{3x}+4}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f.

On considère la fonction f définie sur $]0;\pi[$ par $f(x)=\ln(\sin x)$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0;\pi[$.
2. Justifier que f est dérivable sur $]0;\pi[$ puis déterminer, pour tout x de $]0;\pi[$, $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;\pi[$.

Limites et logarithme

Déterminer les limites suivantes et indiquer les équations des éventuelles asymptotes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} 1-\ln x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-x^2+1$ d) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x-x^2+1$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(1+2x)$

Déterminer les limites suivantes et indiquer les équations des éventuelles asymptotes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2+x}{5+x^2}\right)$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x-(\ln x)^2$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x-(\ln x)^2$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$

L'objectif de cet exercice est de déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$

1) a) Compléter : Si $x > ...$ alors $\ln x > A$
   b) Conclure.
2) On pose $X = \dfrac{1}{x}$
   a) Compléter $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = \lim\limits_{X\to ...} ...$
   b) Conclure.

L'objectif de cet exercice est de déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

1) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$
   a) Étudier les variations de f
   b) En déduire que pour $x > 0$, $\ln x < x$
   c) Déduire du b) que pour $x > 0$, $\ln x < 2\sqrt{x}$
   d) Conclure.
2) On pose : $X = \sqrt{x}$
   a) Compléter $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to ...} ...$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
3) On pose : $X = \dfrac{1}{x}$
   a) Compléter $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{X\to ...} ...$
   b) Conclure.

---

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1.1$ et $u_0 = \dfrac{2}{5}$.
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 100$.
b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.9$ et $u_0 = 20$.
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 0.1$.

Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$ b) $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n > 0.99$ c) $5 \times (1.2)^n > 10^3$

Probabilité et logarithme

1) Luc lance une pièce non truquée.
   Combien de fois doit-il lancer cette pièce au minimum pour que
   la probabilité d'avoir au moins 1 pile soit supérieure à 0.99

2) Lotfi lance un dé non truqué à 6 faces.
   Combien de fois doit-il lancer ce dé au minimum pour que
   la probabilité d'avoir au moins un six soit supérieure à 0.999.

3) On place un capital à 4% par an en intérêts composés.
   C'est à dire qu'à la fin de chaque année, les intérêts s'ajoutent au capital.
   Au bout de combien de temps, le capital aura-t-il doublé ?

4) Michel achète des poissons dans un magasin.
   La probabilité qu'un poisson vive plus de deux ans est de 0.1

Combien doit-il en acheter au minimum pour la probabilité d'en avoir encore un vivant après de 2 ans soit supérieure à 0.99

On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

1) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2) Soit M et N les points de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
   Sur l'intervalle $[1;e]$, pour quelle valeur de x, la distance MN est-elle maximale ?

On rappelle que pour tout réel $a > 0$, $\boldsymbol{e^{\ln a} = a}$.
En déduire pour tous réels a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$.

On rappelle que pour tous réels a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$.
1) Compléter : Pour tout réel $a \neq 0$, $a \times ... = 1$
2) En déduire que pour tout réel $a > 0$, $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$
3) En déduire que pour tous réels a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$

On rappelle que pour tous réels a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$.
1) Compléter : Pour tout réel $a \geq 0$, $\sqrt{a} \times ... = a$
2) En déduire que pour tout réel $a > 0$, $\boldsymbol{\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$

On rappelle que pour tous réels a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$.
1) Démontrer que pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n, $\boldsymbol{\ln(a^n) = n\ln a}$.
2) Démontrer que la propriété du 1) reste vraie pour tout n entier négatif.

On rappelle que pour tout réel $a > 0$, $\boldsymbol{e^{\ln a} = a}$.
En déduire que la fonction **logarithme népérien** est **croissante** sur $]0;+\infty[$.

On rappelle que : $\begin{cases} \text{La fonction logarithme népérien est dérivable sur }]0;+\infty[\\ \text{Pour tout réel } x > 0,\ e^{\ln x} = x \end{cases}$
En déduire pour tout réel $x > 0$, $\boldsymbol{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

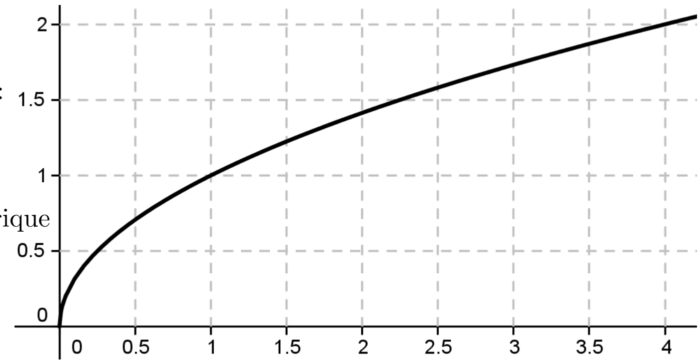
On rappelle que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$.
En déduire que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$.

On veut démontrer par deux méthodes que pour tout a et b strictement positifs, $\boldsymbol{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$
1) On rappelle que pour tout $a > 0$, $e^{\ln a} = a$.
   En déduire pour que tout a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
2) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ où a est un réel strictement positif.
   a) Déterminer $f(1)$.
   b) Déterminer $f'(x)$.
   c) Conclure.

Suite et logarithme

On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) On a représenté la courbe de la fonction racine carrée.
   Déterminer graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2) Conjecturer le sens de variation de (u_n).
3) (u_n) semble-t-elle converger ?
   Si oui, conjecturer sa limite.
4) Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$
5) Démontrer ce qui a été conjecturé au 3)
6) On pose $v_n = \ln u_n$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
   c) Démontrer la conjecture du 3) en utilisant la question 6 b).



Équation avec paramètre - nombre de solutions - problème ouvert

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$.
où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée log est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

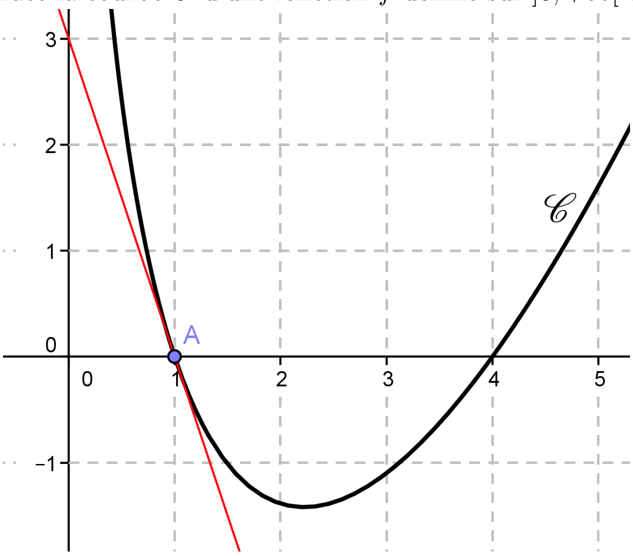
1. Déterminer $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$.
2. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. Démontrer que pour tous nombres a et b strictement positifs :
   a) $\log(ab) = \log a + \log b$.
   b) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.
4. Démontrer la conjecture du 2.
5. Déterminer le sens de variation de la fonction log.
6. Le pH d'une solution mesure l'acidité d'une solution.
   On définit le pH par $\mathrm{pH} = -\log[H^+]$
   où H^+ désigne la concentration en ions hydrogène en moles par litre.
   a) Une solution est dite neutre lorsque le pH vaut 7.
      Déterminer la concentration en ions H^+ pour qu'une solution soit neutre.
   b) Une solution est dite acide lorsque le pH est inférieur à 7.
      Une solution a une concentration en ions H^+ de 2×10^{-11}.
      Cette solution est-elle acide ?
   c) Matthias affirme que lorsque la concentration en ions H^+ diminue, le pH augmente.
      Est-ce vrai ?

Nombre de chiffres d'un entier naturel

Soient n et p deux entiers naturels tels que $10^n \leqslant p < 10^{n+1}$.

1. Déterminer le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de p.
2. Montrer que $n = E(\log p)$ où la fonction E désigne la fonction partie entière.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2^{2018}.

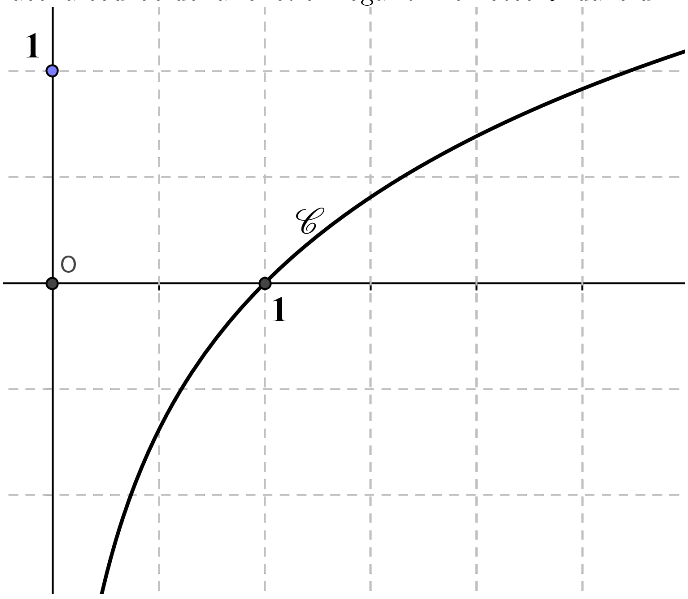
On a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ et la tangente à $\mathscr{C}$ en A.



On sait que $f(x) = (ax + b)\ln x$ où a et b sont des réels.
On cherche les valeurs de a et b.

1) A l'aide du graphique, déterminer $f(1)$, $f(4)$ et $f'(1)$ en justifiant.
2) Déterminer $f'(x)$.
3) Montrer que a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 4a+b &= 0 \\ a+b &= -3 \end{cases}$
4) En déduire les valeurs de a et b.
5) Expliquer comment vérifier la cohérence des résultats à l'aide d'une calculatrice.

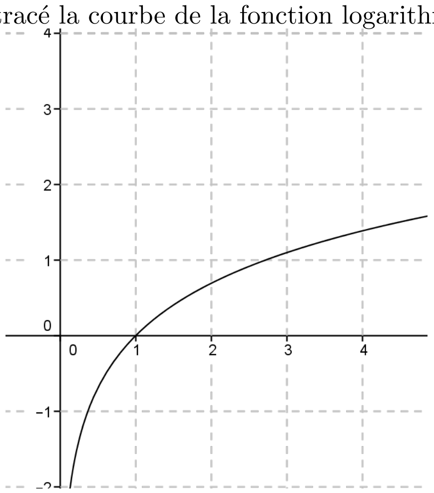
On a tracé la courbe de la fonction logarithme notée $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé (O ;I ;J).



Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.

1) On considère le point M de $\mathscr{C}$ pour lequel la distance OM est minimale.
   a) Placer approximativement le point M
   b) Quelle est alors la valeur de x ? Tracer la tangente T à $\mathscr{C}$ en M.
   c) Quelle conjecture peut-on faire concernant T et la droite (OM) ?
2) On pose $OM = \sqrt{f(x)}$ où $x \in]0; +\infty[$
   a) Déterminer $f(x)$ en fonction de x.
   b) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{x}(x^2 + \ln x)$.
3) On note $u(x) = x^2 + \ln x$.
   a) Étudier les variations de u.
   b) Déterminer les limites de u en 0 et $+\infty$.
   c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α.
   d) En déduire le tableau de signe de $u(x)$.
   e) Exprimer $\ln \alpha$ en fonction de α.
4) L'objectif de cette question est de démontrer la conjecture du 1.b).
   a) A l'aide de la question 3) déterminer le signe de $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau de variations f.
   c) Que peut-on dire des variations de f et de OM.
   d) En déduire les coordonnées du point M en fonction de α
      pour lesquelles la distance OM est minimale.
   e) Déterminer une valeur de α à 10^{-1}. Est-ce cohérent ?
5) L'objectif de cette question est de démontrer la conjecture du 1.c).
   M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.
   a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (OM).
   b) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en M.
   c) Démontrer la conjecture du 1.c)

On a tracé la courbe de la fonction logarithme népérien.



a) Expliquer à l'aide de quelle transformation, on peut tracer les courbes des fonctions f, g et h.

$f(x) = -\ln x \qquad g(x) = 2 + \ln x \qquad h(x) = \ln(x+1)$

b) Tracer les courbes des fonctions f, g et h.

---

1) On considère la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \ln(x) - (x-1)$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

c) En déduire que pour $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$

2) Démontrer que pour $x > 0$, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x$

3) En déduire que pour k entier naturel non nul, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3.

b) Montrer que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{2n-1} = u_n + \dfrac{1}{2n}$.

c) Écrire l'inégalité du 3) pour toutes les valeurs de $k = n$ à $k = 2n - 1$.

d) Faire la somme de toutes ces inégalités et en déduire que $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \dfrac{1}{2n}$

e) Quelle est la plus petite valeur de n qui permet d'avoir un encadrement de $\ln 2$ d'amplitude 10^{-1} ?

f) Déterminer un encadrement de $\ln 2$ d'amplitude 10^{-1}.

g) Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

Théorème des valeurs intermédiaires et logarithme

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+2}$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Déterminer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$.

3) On note u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x + 2 + 2\ln x$.

a) Déterminer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $u'(x)$. En déduire les variations de u.

b) Déterminer les limites de u en 0 et $+\infty$.

c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

d) En déduire le signe de $u(x)$.

e) Déterminer un encadrement α d'amplitude 10^{-2}.

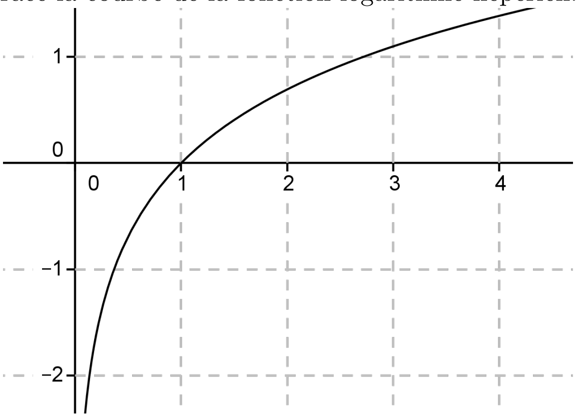
f) Justifier que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha}{2}$

4) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$. En déduire les variations de f.

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 1$ et $g(x) = x\ln(x) - x$

1) Déterminer la position relative des courbes de f et g par le calcul.
2) Vérifier la cohérence des résultats à l'aide de la calculatrice.

On a tracé la courbe de la fonction logarithme népérien.

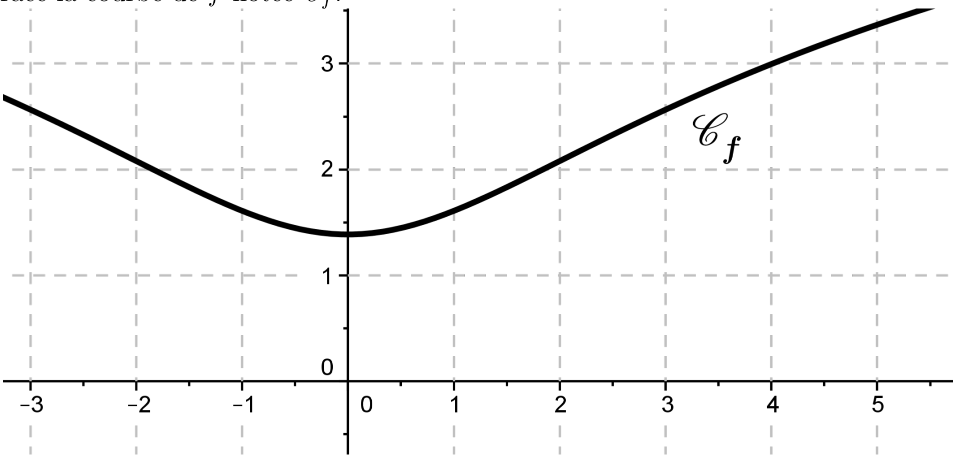


1. Résoudre graphiquement l'équation $\ln x = -x$.
2. Montrer que l'équation $\ln x = -x$ admet une seule solution α sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs :

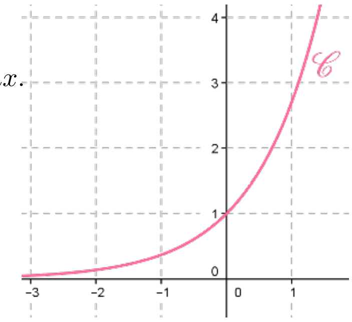
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.
On a tracé la courbe de f notée $\mathscr{C}_f$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $\ln(x^2 + 4) = x$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a) Étudier les variations de g.
   b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
   d) Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \leq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) A l'aide du graphique, déterminer u_1, u_2, u_3.
   b) Conjecturer le sens de variations de (u_n).
   c) Conjecturer la limite de (u_n).
   d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \alpha$.
   e) Démontrer la conjecture du 3.b).
   f) En déduire que la suite (u_n) converge.
   g) Démontrer la conjecture du 3.c).

Problème ouvert - Sujet de Bac Liban 2015 exercice 3
On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-contre :
Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.



1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_e$ d'équation $y = ex$,
   est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m,
   le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

QCM logarithme
Dire si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.

1. L'équation $\ln x = -1$ n'a pas de solution.
2. Si $u > 0$ alors $\ln u > 0$.
3. $\ln(x^2)$ peut être négatif.
4. Pour tout $x > 0$, $\ln(2x) > \ln x$
5. L'expression $\ln(-x)$ n'a pas de sens.
6. Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln x \times \ln y = \ln(x + y)$.
7. $(\ln 3)^2 = \ln 9$
8. Si $f(x) = (\ln x)^2$ alors $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.
9. $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est un nombre négatif.
10. (u_n) est une suite géométrique avec $u_0 > 0$ et la raison $q > 0$ alors $(\ln(u_n))$ est arithmétique.

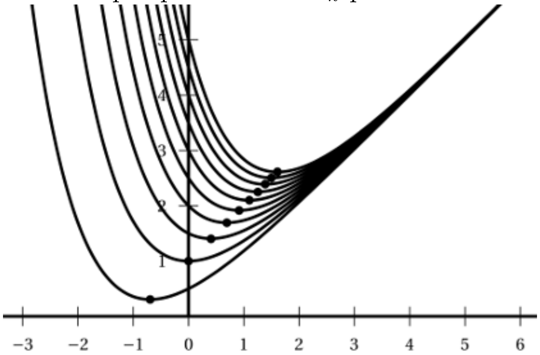
Question ouverte - Comparaison de exponentielle et logarithme
Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $e^x > \ln x$.

Problème ouvert - Nombre de solutions d'une équation
Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln x = kx^2$ où k est un nombre réel.

Problème ouvert - Tangente commune
Existe-t-il des tangentes communes aux courbes des fonctions logarithme et exponentielle. Justifier.

Problème ouvert
Pour tout entier $n \geq 1$, comparer n^{n+1} et $(n+1)^n$.
On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Fonction exponentielle, minimum et points alignés - Bac S Liban 2017 exercice 3
Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + ke^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Il semblerait que chaque fonction f_k admette un minimum sur $\mathbb{R}$. Si l'on appelle A_k le point de $\mathscr{C}_k$ correspondant à ce minimum, il semblerait que ces points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

Étude d'une fonction exponentielle avec paramètre - Bac S Amérique du nord 2017 exercice 2
Soit f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = -\dfrac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4}$ où $b > 0$.

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [-2 ; 2], $f(-x) = f(x)$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-2; 2]$, $f'(x) = -\dfrac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [-2 ; 2]

Logarithme et aire maximale d'un rectangle
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre :

À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- f est-elle positive sur $]0; 14]$?
- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante, quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant. Justifier les réponses.