Fonction exponentielle : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Calculer avec la fonction exponentielle
Simplifier les expressions suivantes où x est un réel quelconque :

a) $\dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}}$ b) $\dfrac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}}$ c) $\left(\dfrac{e}{e^{-x}}\right)^4$

Équation avec la fonction exponentielle
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2-x}=e^{x}$ b) $e^{2x+3}=1$ c) $e^{5-x^2}=e$
d) $e^{-x}=0$ e) $2e^{-x}=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ f) $2e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}+1}$

Inéquation avec la fonction exponentielle
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{2x}-e^{x+1}<0$ b) $1-e^{x-2}\geq 0$ c) $e^{x}-\dfrac{1}{e^{x}}\leq 0$ d) $\dfrac{1}{e^{x}}-e>0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1-e^{x^2-1}<0$.

Inéquation avec des exponentielles
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes, en posant $X=e^{x}$:

a) $2e^{2x}-e^{x}=1$ b) $e^{2x}+2e^{x}-3\leq 0$

Signe avec la fonction exponentielle
Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $1-e^{x}$ b) $e^{2x}-1$ c) $e^{2x}-e^{x+1}$ d) $e^{(x^2)}-e^{x}$ e) $1-\dfrac{1}{e^{x}}$

Inégalités avec la fonction exponentielle
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-e^{-x}$.
1) Démontrer que pour tout réel $x<0$, $f(x)<0$.
2) Démontrer que pour tout réel $x\geq 0$, $0\leq f(x)<1$.

Démontrer que pour tout $x\in]-\infty;0[$, $e^{5x}-3<0$

L'objectif de cet exercice est de déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x}-x$.
1) Déterminer les variations de f.
2) En déduire que pour tout x réel, $e^{x}\geq x$
3) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$. On pourra poser $X=-x$

L'objectif de cet exercice est de déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x}-\dfrac{x^2}{2}$.
1) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2) Déterminer le signe de $f''(x)$ puis de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3) En déduire que pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.
4) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}$

5) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$. On pourra poser $X = -x$.

Limite avec la fonction exponentielle

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x + 1$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x - e^x + 1$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{e^{2x} + 1}$

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1)\, e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{e^x}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{2x} - e^x\right)$

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0.5x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{0.1x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{1-x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{1-x}$

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{4x}$

Limite d'une composée avec la fonction exponentielle

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-\frac{x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-\frac{x}{2}}$

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^3-x}$

Étudier les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{2x}}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{2x}}$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} xe^{\frac{1}{2x}}$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} xe^{\frac{1}{2x}}$

Dérivée et variation avec la fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1-3x}$.

1) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ sans utiliser la dérivation.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Dans chaque cas, déterminer le tableau de variations de f sur le domaine I indiqué :

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ et $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

On considère la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = e^{\cos x}$.

1) Déterminer pour tout x de $[0; 2\pi]$, $f'(x)$.

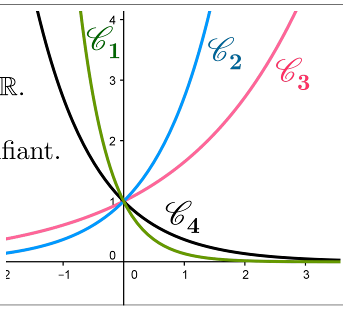
2) En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$.

Associer courbe et fonction exponentielle

On a tracé les courbes de quatre fonctions f, g, h, i définies sur $\mathbb{R}$.

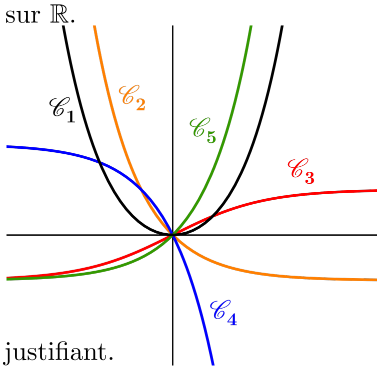
On sait que $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = e^{0.5x}$, $i(x) = e^{-2x}$

Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond en justifiant.



On a tracé les courbes de cinq fonctions f, g, h, i, j définies sur $\mathbb{R}$.
Les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$
sont asymptotes en $+\infty$ respectivement à $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
On sait que :

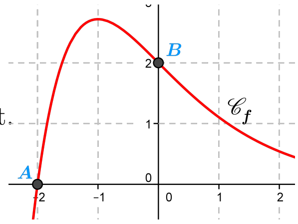
$f(x) = e^{-x} - 1$,
$g(x) = -2e^{x} + 2$,
$h(x) = e^{x} - 1$,
$i(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} - 1$
$j(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$



Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond en justifiant.

On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe de f passe par les points $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$.
On sait que $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des réels.

1) A l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2) En déduire le tableau de variations de f.



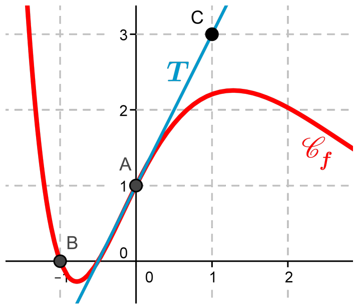
Une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ a pour tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
u	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	0

1) Déterminer le tableau de variations de la fonction e^{u}.
2) Déterminer les limites de e^{u} en $-\infty$ et $+\infty$.

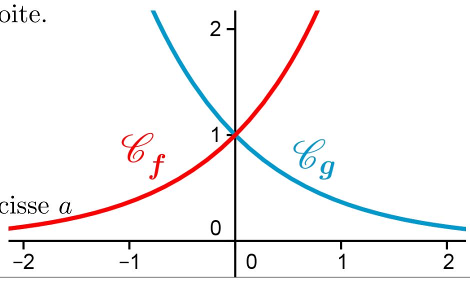
On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{C}_f$ passe par les points A(0 ;1) et B(-1 ;0).
T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A et passe par le point C(1 ;3).
On sait également que pour tout x réel :
$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b, c sont des nombres.

1) Déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$.
2) Déterminer la valeur de a, b et c en justifiant.



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x}$ et $g(x) = e^{-x}$.
Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions.

1) Démontrer que si m est le coefficient directeur d'une droite $\mathscr{D}$ du plan alors le vecteur de coordonnées $(1; m)$ est un vecteur directeur de cette droite.
2) Déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$ et $g'(x)$.
3) On note T_a et Δ_a les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a.
   a) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 sont perpendiculaires.
   b) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a sont perpendiculaires quelque soit a réel.



Suite avec la fonction exponentielle

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{-n}$.

1) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

2) On pose pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de S_n.

3) On pose pour tout entier naturel n, $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

b) Déterminer la limite de P_n.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - e^{-\frac{n}{2}}$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

2) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = e^{-\frac{n}{2}}$ et $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

b) Exprimer S_n en fonction de n.

c) En déduire la somme $u_0 + u_1 + ... + u_n$ et la limite de cette somme.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de solution de l'équation $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = x$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} - x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

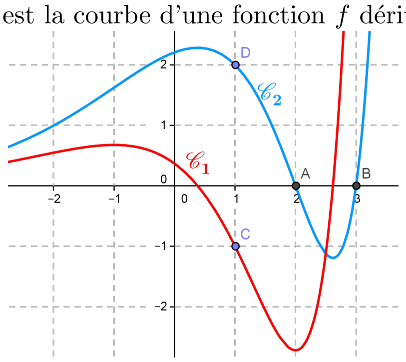
2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

3) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

4) Conclure et donner un encadrement des éventuelles solutions à 10^{-1} près.

On a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

L'une est la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. L'autre est la courbe de f'.



1) Associer à chaque courbe la fonction qui lui correspond en justifiant.

2) On sait que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2 + ax + b)e^{x+c}$ où a, b, c sont des nombres.

a) Justifier que a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 4 + 2a + b = 0 \\ 9 + 3a + b = 0 \end{cases}$

b) Résoudre ce système et indiquer les valeurs de a et b.

c) Déterminer $f'(x)$.

d) A l'aide du point C, déterminer la valeur de c et donner l'expression de $f(x)$.

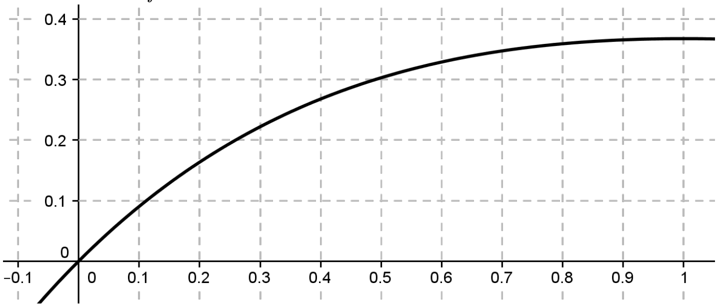
e) Expliquer comment vérifier ces résultats à l'aide de la calculatrice.

f) A l'aide du graphique, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

L'objectif de cet exercice est de trouver une valeur approchée de e.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
1) Étudier les variations de f et en déduire que pour tout x réel, $1 + x \leq e^x$.
2) En déduire que pour $x < 1$, $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$
3) Déduire du 1) que pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$
4) Déduire du 2) que pour tout entier $n \geq 1$, $e \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
5) En déduire un encadrement de e à 10^{-2} près.
6) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $e - \dfrac{3}{n} \leq u_n \leq e$. En déduire la limite de (u_n).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative
Partie I
1) Déterminer les variations de f.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4) Étudier la position de T par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Partie II
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_0 = 1$.
1) On a tracé $\mathscr{C}_f$. Déterminer graphiquement u_1, u_2, u_3, en faisant apparaitre les traits de construction.

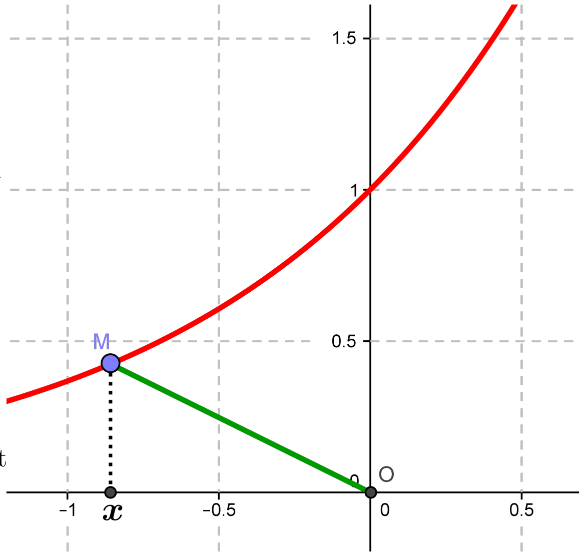


2) Conjecturer un majorant et un minorant de la suite (u_n).
3) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
4) Justifier que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
5) Démontrer la conjecture du 2).
6) Démontrer la conjecture du 3).
7) En déduire que (u_n) converge. Justifier.
8) On note ℓ la limite de (u_n). On admet que ℓ vérifie l'équation, $\ell = \ell e^{-\ell}$. Déterminer la valeur de ℓ.

On a tracé la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé (O ;I ;J).
On considère un point M d'abscisse x sur cette courbe.

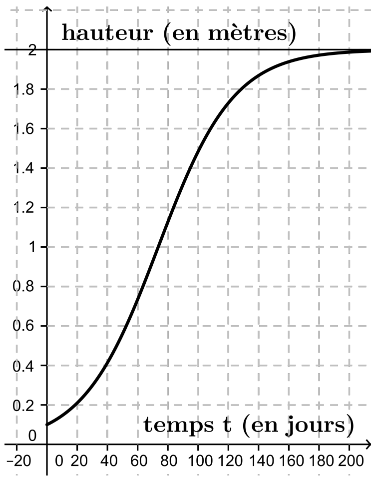
On cherche la position du point M pour que la distance OM soit minimale.

1) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle la distance OM est minimale.
2) Déterminer la distance OM en fonction de x.
3) On pose $g(x) = x^2 + e^{2x}$
   a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b) Déterminer le signe $g''(x)$ et
   En déduire les variations de g'.
   c) Démontrer que g' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté α.
   d) En déduire le signe de $g'(x)$ puis les variations de g.
   e) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.
   f) Quel est le lien entre OM et $g(x)$?
   g) Conclure. Est-ce cohérent avec la conjecture du 1)
   h) Justifier que $\alpha + e^{2\alpha} = 0$
4) Propriété de la tangente :
   a) Placer le point M de la courbe d'abscisse α.
   b) Tracer la tangente T en ce point, approximativement et sans justification.
   c) Tracer le segment [OM]. Quelle conjecture peut-on faire concernant les droites T et (OM) ?
   d) Déterminer un vecteur directeur de T et un de (OM).
   e) Démontrer la conjecture du c).



La hauteur, en mètre, d'un plant de maïs à l'instant t est modélisée par la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-0.04t}}$ où t est exprimé en jour. a et b sont des constantes réelles.
On sait qu'à l'instant $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers 2 m.

1) Déterminer a et b.
2) On a représenté la courbe de la fonction h.
   La vitesse de croissance du plant de maïs correspond à la dérivée de la fonction h.
   A l'aide du graphique, déterminer une valeur approchée de l'instant t où la vitesse de croissance est maximale.
   A quelle hauteur du plant cela correspond-il ?



Problème ouvert - Convexité

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$.
Montrer que le segment [AB] est au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.
