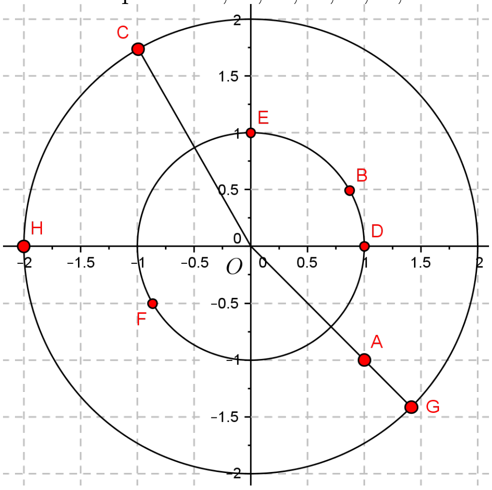
Exercices : Argument d'un nombre complexe
Corrigés en vidéo et le cours sur jaicompris.com

Savoir déterminer le module et un argument graphiquement

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE})$.
On considère les points A, B, C, D, E, F, G et H et on z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_G, z_H leurs affixes respectives.



Écrire, en utilisant le graphique, z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_G, z_H sous forme exponentielle et algébrique.

Écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique et exponentielle

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3$ $\quad z_2 = -4$ $\quad z_3 = i$ $\quad z_4 = -3i$

$z_5 = 2 + 2i$ $\quad z_6 = 2 - 2i$ $\quad z_7 = -\sqrt{3} + 3i$

2) Écrire ces nombres complexes sous forme trigonométrique et exponentielle.

Argument d'un nombre complexe - Démonstrations de cours - ROC

Soit z un nombre complexe non nul.

1) Exprimer $\arg(\overline{z})$ en fonction de $\arg(z)$.
2) Exprimer $\arg(-z)$ en fonction de $\arg(z)$.
3) Exprimer $\arg(-\overline{z})$ en fonction de $\arg(z)$.

Savoir utiliser les propriétés des arguments

1) Déterminer un argument de $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -3 + \sqrt{3}i$.
2) En déduire un argument des nombres suivants :

$$z_1 \times z_2 \qquad -3 - \sqrt{3}i \qquad -\frac{1}{2}(1+i) \qquad -1 - i \qquad \frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(1-i)^3}$$

Pièges à éviter sur les arguments

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \qquad z_2 = -2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$z_3 = 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \qquad z_4 = 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$$

2) Écrire ces nombres complexes sous forme exponentielle.

Lieu de points et nombre complexe
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
1) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
2) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$.
3) Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $\arg(z-i) = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $|z| \leq 4$.

Écrire un nombre complexe sous forme exponentielle
Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :
$z_1 = 2 - 2i \qquad z_2 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} \qquad z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \qquad z_4 = \dfrac{1}{1-i}$

Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :
$z_1 = -4e^{i\frac{\pi}{5}} \qquad z_2 = \dfrac{-3(1+i)}{-\sqrt{3}+3i} \qquad z_3 = -\sqrt{5}(-2\sqrt{3}+6i)^2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Passer d'une forme exponentielle à la forme algébrique
Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :
$z_1 = e^{i\pi} \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = 1 - e^{-i\frac{\pi}{2}} + 3e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad z_4 = \dfrac{-2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes à l'aide de l'exponentielle complexe
Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = -i$.

Résoudre une équation du troisième degré de l'exponentielle complexe - racine cubique de l'unité
Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 1$.

Déterminer un angle à l'aide des nombres complexes
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ et $z_B = \sqrt{3} - 3i$.
1) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
2) Construire les points A et B de manière rigoureuse.
3) Déduire de la question 1) une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ , \overrightarrow{OB})$.

Lien entre angle et argument d'un nombre complexe - Démonstration de cours - ROC
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

On rappelle que $\begin{cases} \arg(\dfrac{z_2}{z_1}) = \arg(z_2) - \arg(z_2) \\ \\ (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \end{cases}$

A l'aide du rappel, démontrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

Utiliser les nombres complexes pour résoudre un problème de géométrie
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 + i$, $z_B = 5 - i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -2 + 5i$.
1) Faire une figure et placer les points A, B, C et D.
2) Quelle conjecture peut-on faire concernant le quadrilatère ABCD.
3) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on conclure ? Justifier.
4) Calculer $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. Donner le résultat sous forme algébrique.
5) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AD})$. Que peut-on en conclure ?

D'après sujet de Bac
Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
1) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.
2) En déduire une forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$.
3) Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
4) En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{12}$.
5) Que faut-il changer à la méthode précédente pour déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$.
1) Montrer que $z_1 = 1 + i$ est solution de (E).
2) Écrire z_1 sous forme exponentielle. Refaire la question 1)
3) Montrer que si z est solution de (E) alors $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
4) En déduire trois autres solutions de (E).

Condition pour qu'un nombre complexe soit réel, positif, négatif, imaginaire pur
Soit n un entier naturel.
1) Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un réel positif ?
2) Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un réel ?
3) Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un imaginaire pur ?

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.
1) Écrire $1 + i$ et $1 - i$ sous forme exponentielle.
2) Lætitia affirme que pour tout entier naturel n, S_n est un nombre réel. A-t-elle raison ? Justifier.
3) Existe-il une infinité d'entiers naturels n tels que $\mathrm{S}_n = 0$?

Démontrer un alignement à l'aide des nombres complexes
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
À tout point M différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.
Démontrer que O, M et M' sont alignés.

Fonction complexe - D'après sujet de Bac
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 4z + 3$.
Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants.
Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = 1 + z + z^2$.
1) Démontrer que $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ est réel.
2) En déduire que si $z = e^{i\alpha}$ alors $\dfrac{z'}{z}$ est réel.
3) Que peut-on en déduire concernant les points O, M et M'. Justifier.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
À tout point M d'affixe z, non nulle, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$.
M' est appelé l'image de M. A et B sont les points d'affixes respectives -1, 1.
1) Soit le point $C(1; 1)$ et C' son image. Déterminer les coordonnées de C'.
2) Déterminer les points M tels que $M' = M$.
3) Déterminer les points M qui ont pour image O.
4) Démontrer que pour tout réel α, $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$
5) En déduire que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, M' appartient au segment $[AB]$.

Module, argument et géométrie
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité :
$\frac{c}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
a) Le triangle OBC est-il isocèle en O ? Justifier.
b) Les points O,B,C sont-ils alignés ? Justifier.
c) Le triangle O,B,C est-il isocèle et rectangle en B ? Justifier.

Propriétés du nombres j
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
1) Montrer que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2) Écrire j sous forme exponentielle.
3) Démontrer que $j^3 = 1$ et que $j^2 = -1 - j$.
4) Soient P, Q et R les points d'affixes respectives 1, j et j^2. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

Problème ouvert - Somme et nombre complexe
Calculer les sommes :
$1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos(nx)$.
$1 + \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin(nx)$.
où n est un entier naturel et $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Objectif : Savoir calculer un argument, faire le lien entre argument et angle, passer de la forme algébrique à une forme exponentielle ou trigonométrique.