Raisonnement par récurrence : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Introduction
Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1°) Écrire la propriété au rang 1, au rang 2.
2°) Vérifier que la propriété est vraie au rang 1 et au rang 2.
3°) Écrire la propriété au rang $n+1$
4°) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Somme des n premiers entiers
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des carrés
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somme des cubes
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Récurrence - suite bornée
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$
1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$
Que peut-on déduire ?

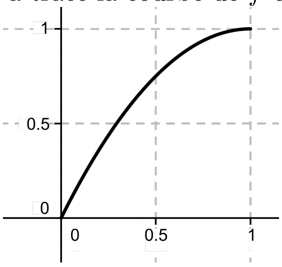
Récurrence - suite croissante, décroissante
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$
1°) Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2°) Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n).
3°) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
4°) Démontrer la conjecture par récurrence.

Soit la suite (h_n) définie par $h_0 = 80$ et pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0.75h_n + 30$.
1) Conjecturer les variations de (h_n).
2) Démontrer par récurrence cette conjecture.

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0,4$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Récurrence - suite bornée - inégalité
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{4u_n + 4}$
On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{4x+4}$
1°) Étudier les variations de f.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

Récurrence et suite
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$
Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x(2-x)$.
1°) On a tracé la courbe de f ci-dessous.



Représenter les premiers termes de la suite.
Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n).
2°) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x(2-x)$
3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$
4°) Démontrer que la conjecture du 1°).

Récurrence - arithmétique
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Erreur classique dans les récurrences
Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :
P_n : $10^n - 1$ est divisible par 9
Q_n : $10^n + 1$ est divisible par 9
1°) Démontrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
2°) Démontrer que si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie.
3°) Un élève affirme : " Donc P_n et Q_n sont vraies pour tout entier naturel n.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4°) Démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5°) Démontrer que Q_n est fausse pour tout entier naturel n.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Soit $P(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par :
$4^n + 1$ est divisible par 3
1°) Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
2°) Que peut-on conclure ?

Récurrence et arithmétique
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

Récurrence et inégalité
Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 3^n$.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$
1°) Étudier les variations de f.
2°) On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$
b) Que peut-on conclure ?

Récurrence - inégalité de Bernoulli
x est un réel positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Récurrence et géométrie
On place n points distincts sur un cercle, et $n \geq 2$.
Démontrer que le nombre de segments que l'on peut tracer avec ces n points est $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Récurrence et somme des angles dans un polygone
Démontrer par récurrence que la somme des angles dans un polygone non croisé vaut $(n - 2)\pi$ radian.

Récurrence - formule explicite d'une suite
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2 + {u_n}^2}$
1°) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
2°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3°) Démontrer cette conjecture.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{-5}{2^n} + 6$

Récurrence et dérivation

Rappel : si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $\left\{ \begin{array}{c} u \times v \text{ est dérivable sur I} \\ \text{et} \\ (u \times v)' = u'v + uv' \end{array} \right.$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, f^n est dérivable sur I et que $(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$.
2°) Appliquer ce résultat à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel non nul.

Algorithme pour calculer la somme d'une suite
Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1 + n$.
Écrire un algorithme pour calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en utilisant la boucle "**Tant que ...**".

Sens de variation d'une suite par 2 méthodes - Exercice très classique
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.
1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2) En déduire le sens de variation de (u_n).
3) On considère la fonction f définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

a) Étudier les variations de f.
b) Refaire la question 2) par une autre méthode.

Piège classique - Algorithme et suite
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 4v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$.
On cherche u_n et v_n qui soient tous les deux supérieurs à 1000.
Écrire un algorithme qui affiche le premier couple $(u_n; v_n)$ qui vérifie cette condition, en utilisant une boucle **Tant Que**.

Déterminer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 5$.
   A l'aide d'un tableur, on obtient les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).
   Quelle formule, étirée vers le bas, peut-on écrire dans la cellule A3 pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ?
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 2nv_n + 5$.
   A l'aide d'un tableur, déterminer les premiers termes de la suite (v_n).

	A
1	u_n
2	3
3	11
4	27
5	59

Suite et algorithmique - Compléter un algorithme - Un piège très classique !

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n$.
On admet la limite de la suite (u_n) vaut 0.
Compléter l'algorithme ci-contre, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leqslant 10^{-5}$.

```
n ← 0
U ← 1
Tant que ...
    n ← ...
    U ← ...
Fin Tant que
Afficher n
```

Raisonnement par récurrence - Erreur classique - Surtout à ne pas faire !
Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $M^n = PD^nP^{-1}$.

- $P^{-1}MP = D \Leftrightarrow PP^{-1}MP = PD \Leftrightarrow MP = PD \Leftrightarrow MPP^{-1} = PDP^{-1}$
  $\Leftrightarrow M = PDP^{-1}$. Donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 1.
- On suppose que pour tout entier $p \geqslant 1$ la propriété est vraie, c'est-à-dire que $M^p = PD^pP^{-1}$.
  D'après l'hypothèse de récurrence $M^p = PD^pP^{-1}$ et on sait que $M = PDP^{-1}$ donc :
  $M^{p+1} = M \times M^p = PDP^{-1} \times PD^pP^{-1} = PDP^{-1}PD^pP^{-1} = PDD^pP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$.
  Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 1 ; elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$ donc d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
