Limite d'une suite - Terminale S
Exercices corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Reconnaitre les formes indéterminées

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$.

a) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\end{cases}$ b) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$ c) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$ d) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-4\end{cases}$

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

a) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\end{cases}$ b) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-3\end{cases}$ c) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$ d) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n et le signe de v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

a) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0\\ v_n>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-4\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0\\ v_n<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0\\ v_n>0\end{cases}$

A l'aide des tableaux de la somme, du produit et du quotient, déterminer si possible $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) $u_n=n^2+n$ b) $u_n=n^2-n$ c) $u_n=\dfrac{2}{n+2}$
d) $u_n=\dfrac{3}{2-n^2}$ e) $u_n=\dfrac{n^2+2}{n+1}$ f) $u_n=\dfrac{3}{0.5^n}$

Limite et suite géométrique

Déterminer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n-3^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+5^n}{7^n}$

Limite de suite et forme indéterminée

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n=n^3-3n^2$ b) $u_n=\dfrac{n^2-2n}{n+1}$ c) $u_n=\dfrac{n^2+n}{1-n^2}$

Limite et Algorithme

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^3-3n^2+5$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Pour un réel A, on souhaite déterminer le plus petit rang n pour lequel $u_n\geq$ A.
   Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème.

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite u :

a) $u_n=n-\sqrt{n}$ b) $u_n=3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}$ c) $u_n=\dfrac{4n-3}{n^2+5}$

Limite de suite, encadrement et théorème des gendarmes

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+2}$ b) $u_n=n-\cos(n)$ c) $u_n=\dfrac{n^2+\sin(n)}{n+5}$

Démontrer que la suite $((-1)^n)$ diverge. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Limite d'une somme d'une suite géométrique

1°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n}$

3°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + x + ... + x^n$ où x est un nombre réel.
Déterminer la limite de (u_n) selon les valeurs de x.

Limite d'une suite à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la **limite** de cette suite $\boldsymbol{u}$.

Pour cela, on considère la suite v définie par tout entier naturel n par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

1) Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2) Conclure.

Limite d'une somme

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1°) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

2°) En déduire la limite de la suite (u_n).

Problème ouvert

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Somme et suite télescopique

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1°) Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2°) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

3°) En déduire la limite de la suite (u_n).

On considère une suite (u_n) croissante qui n'est pas convergente.

1°) Démontrer que (u_n) n'est pas majorée.

2°) En déduire sa limite.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

2°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3°) Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée. On pourra raisonner par l'absurde.

4°) En déduire la limite de la suite (u_n).

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

PARTIE 1 : Conjectures

1.a) Sur un même graphique, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 4$.
1.b) Déterminer graphiquement, u_1, u_2, u_3.
1.c) Déterminer par le calcul, u_1, u_2, u_3. Les résultats sont-ils cohérents ?
1.d) Conjecturer le sens de variation de (u_n).
1.e) Conjecturer la limite de (u_n).

PARTIE 2 : Démonstration des conjectures

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 6$.
2.b) Démontrer la conjecture du 1.d)
2.c) Démontrer la conjecture du 1.e)

PARTIE 3 : Démonstration des conjectures par une seconde méthode

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.
3.a) Déterminer v_0, v_1, v_2.
3.b) Conjecturer la nature de la suite (v_n).
3.c) Démontrer cette conjecture.
3.d) Exprimer v_n en fonction de n. Exprimer u_n en fonction de n.
3.e) En déduire la limite de la suite (u_n).

Limite d'une suite géométrique : démonstration du cours

x est un réel positif.
1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
2°) En déduire la limite de la suite (q^n) où $q > 1$.
3°) On cherche maintenant la limite de (q^n) où $0 < q < 1$.
a) On pose $p = \dfrac{1}{q}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n$.
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$.

Limite d'une somme

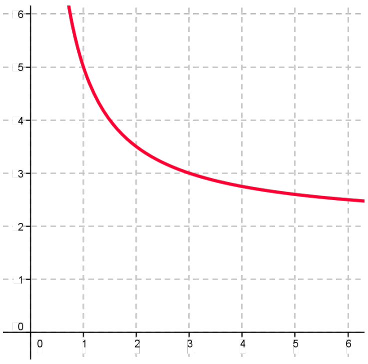
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$
1°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
3°) Que peut-on en déduire ?

Suite homographique

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{u_n}$.

L'objectif du problème est d'exprimer u_n en fonction de n puis de trouver la limite de (u_n).

1°) On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$.



Déterminer graphiquement u_1, u_2, u_3.

2°) Déterminer par le calcul, u_1, u_2, u_3. Est-ce cohérent ?

3°) Quelles conjectures peut-on faire concernant le sens de variation, et la limite de cette suite (u_n).

4°) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

5°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

6°) Déterminer par le calcul les 4 premiers termes de la suite (v_n).

7°) La suite v semble-t-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier votre conjecture.

8°) Démontrer la conjecture du 7°).

9°) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

10°) En déduire la limite de la suite (u_n). Est-ce cohérent ?

Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1) Montrer que pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3) Déterminer la valeur de ℓ.

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle]-1 ;1[, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.
3. On considère la suite (h_n) définie par $h_0 = 80$ et pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0.75h_n + 30$.
   La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0.5u_n + 4n - 3$.
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 8n + 22$.
A l'aide d'un tableur, on obtient :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	8	30
3	1	1	15
4	2	1,5	7,5
5	3	5.75	3,75
6	4	11,875	1,875

1) Conjecturer une expression explicite de v_n, puis démontrer cette conjecture.
2) En déduire une expression explicite de u_n, puis indiquer si la suite (u_n) est convergente.

Limite d'une suite par deux méthodes

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 24 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{array}\right.$

PARTIE 1 : Étude de la convergence

1.a) Déterminer u_1, u_2, u_3 à 0.1 près

1.b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 4$

1.c) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

1.d) En déduire que la suite (u_n) converge.

PARTIE 2 : Déterminer la limite

Soit l la limite de la suite (u_n).

2.a) Démontrer que l est solution de l'équation $l^2 = l + 12$.

2.b) En déduire la limite de la suite (u_n).

PARTIE 3 : Déterminer la limite par une deuxième méthode

3.a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 4 = \dfrac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$

3.b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 4 \leq \dfrac{1}{8}(u_n - 4)$.

3.c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n - 4 \leq \dfrac{1}{8^n}$.

3.d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Suite : Exercice type Bac

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{10} u_n (20 - u_n) \end{array}\right.$

1°) Soit la fonction f définie sur [0 ;20] par $f(x) = \dfrac{1}{10} x(20 - x)$.

a) Étudier les variations de f sur [0 ;20].

b) En déduire que si $x \in [0; 10]$, alors $f(x) \in [0; 10]$.

2°) Déterminer u_1, u_2

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

4°) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5°) On note l la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que l est solution de l'équation $l = \dfrac{1}{10} l(20 - l)$.

b) Résoudre cette équation et en déduire la valeur de l.

Suites croisées

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ et pour tout entier naturel n :

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n \times b_n}{a_n + b_n}$.

1) Démontrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites strictement positives.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{2(a_n + b_n)}$.

3) En déduire le signe de $a_n - b_n$ pour $n \geq 1$.

4) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes à partir du rang 1.

5) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers une même limite.

QCM limite de suite

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

1. Si deux suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives et convergent alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.
2. Si pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$ alors $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{2}$.
3. Si la suite (u_n) est croissante et strictement négative alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est décroissante.
4. Si pour tout entier $n \geq 1$, $|u_n - 5| \leq \frac{1}{n}$ alors la suite (u_n) converge vers 5.
5. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite (u_n) n'est pas majorée.

Suite de Héron - type Bac

PARTIE 1 : Étude d'une fonction f

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

1.a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

1.b) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

1.c) Démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$ alors $f(x) \geq \sqrt{2}$.

PARTIE 2 : Étude de la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2.a) Déterminer u_1, u_2, u_3 à 0.1 près

2.b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2.c) En déduire que (u_n) est convergente.

2.d) On note l la limite de la suite u. Démontrer que l est solution de l'équation $l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l})$.

2.e) En déduire la valeur de l.

2.f) Que faut-il changer à la définition de la suite (u_n) pour qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.

PARTIE 3 : Rapidité de convergence

3.a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2$.

3.b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$.

3.c) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{2})$

4.d) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

QCM limite de suite

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

1. Si une suite est décroissante minorée alors elle est convergente.
2. Si une suite est croissante et convergente alors elle est majorée.
3. Si une suite est convergente et majorée alors elle est croissante.
4. Si une suite est croissante alors elle est minorée.
5. Si une suite est croissante alors elle n'est pas majorée.
6. Si une suite est croissante et convergente alors elle est bornée.

Objectif : Trouver la limite d'une suite récurrente, arithmétique, géométrique, explicite, croissante, décroissante, majorée, minorée, convergente, par conjecture, théorème des gendarme, limite d'une somme