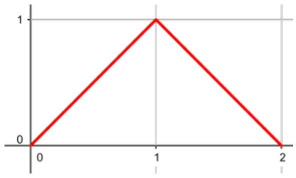
**Loi de probabilité à densité : Exercices**
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

## Démonter qu'une fonction est une densité de probabilité

Dans chaque cas, justifier que la fonction $f$ est une densité de probabilité sur l'intervalle I indiqué :

1) $f$ est définie sur I=[0 ;2] par sa courbe ci-contre :




2) $f$ est définie sur I=[-1 ;1] par $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$.

3) $f$ est définie sur I=[0 ;+∞[ par $f(x) = e^{-x}$.

---

## Calculer des probabilités avec une variable aléatoire continue

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}$ et X est une variable aléatoire de densité $f$.
Calculer les probabilités suivantes : a) $\mathrm{P}(1 \leq \mathrm{X} \leq 2)$ b) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 3)$.

---

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{8}x$.
1) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité sur [0 ;4].
2) Soit X est une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer la probabilité : $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\geq 2}(1 \leq \mathrm{X} \leq 3)$.
3) Les évènements $(\mathrm{X} \geq 2)$ et $(1 \leq \mathrm{X} \leq 3)$ sont-ils indépendants ?

---

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = k \cos x$ où $k \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer le réel $k$ tel que $f$ soit une densité de probabilité sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Déterminer le réel $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\mathrm{P}(-a \leq \mathrm{X} \leq a) = \frac{1}{2}$.

---

On considère la fonction $f$ définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = \frac{k}{t^2}$ où $k \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer le réel $k$ tel que $f$ soit une densité de probabilité sur $[1; 5]$.
2) Déterminer le réel $a$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq a) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq a)$.

---

## Espérance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire de densité $f$ définie sur [0 ;3] par $f(x) = \frac{1}{9}x^2$. Déterminer E(X).

---

On considère la fonction $f$ définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x^3}$.
1) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité sur $[1; +\infty[$.
2) Soit X une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer l'espérance de X, notée E(X).

---

On considère la fonction $f$ définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{2}{x^2}$.
1) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité sur $[1; 2]$.
2) Soit X une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer l'espérance de X, notée E(X).

---

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.
1) Vérifier que $f$ est bien une densité sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2) Soient les fonctions $g$ et $G$ définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ respectivement par $g(x) = x \cos x$ et $G(x) = ax \sin x + b \cos x$, où $a$ et $b$ sont des réels. Déterminer $a$ et $b$ tels que la fonction $G$ soit une primitive de $g$.
3) Soit X une variable aléatoire de densité $f$. Déterminer l'espérance de X, notée E(X).

---