Loi normale centrée réduite : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

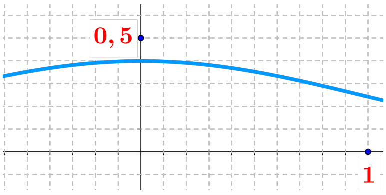
Fonction de Laplace-Gauss

On appelle fonction de Laplace-Gauss la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) La fonction φ est-elle paire, impaire ? Justifier.
2) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer les limites de φ aux bornes du domaine de définition.

Loi normale centrée réduite et graphique

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.
On a tracé la courbe de Gauss.
Déterminer graphiquement un encadrement $P(-0{,}3 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$.
Vérifier la cohérence de ce résultat à l'aide d'une calculatrice.



Utiliser les propriétés de la courbe en cloche

Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On donne $P(Z \leqslant 1{,}2) \approx 0{,}885$ à 10^{-3} près.
Déterminer sans calculatrice, à 10^{-3} près, $P(Z \geqslant -1{,}2)$ puis $P(-1{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}2)$.

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.
On sait que $P(X < 0{,}2) \approx 0{,}58$ et $P(X \leqslant -0{,}3) \approx 0{,}38$.
A l'aide de ces informations et sans calculatrice, déterminer une valeur approchée de :

$P(X \geqslant -0{,}2)$ $\quad$ $P(-0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}3)$ $\quad$ $P(X \leqslant -0{,}3 \cup X \geqslant 0{,}2)$

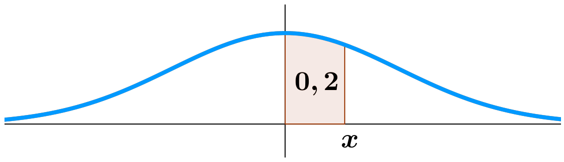
Utiliser sa calculatrice pour calculer des probabilités avec une loi normale

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Déterminer à l'aide d'une calculatrice, avec trois décimales, $P(X < -0{,}6)$ puis $P(-1{,}2 \leq X \leq 0{,}4)$.

Savoir utiliser Inverse Normale

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
A l'aide d'une calculatrice, déterminer à 10^{-2} près, α tel que $P(X \leq \alpha) = 0{,}9$.

On a tracé la courbe de Gauss.
L'aire du domaine coloré en marron vaut 0,2.
Déterminer x à 10^{-3} près.



Déterminer un intervalle centré en 0

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et t un réel positif.
1) Démontrer que si $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0{,}7$ alors $P(X \leqslant t) = 0{,}85$.
2) A l'aide d'une calculatrice, en déduire la valeur de t à 10^{-2} près.

Espérance de la loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite.
Déterminer l'espérance de X, notée E(X).

Théorème du cours : Démonstration

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite. On note φ la densité associée.
L'objectif de cet exercice est de montrer que :
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α, tel que $\mathbf{P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha}$
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \mathrm{P}(-t \leqslant \mathrm{X} \leqslant t)$.

1) Justifier que $1-\alpha$ appartient à $]0\,;1[$.
2) Justifier que pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = 2\displaystyle\int_0^t \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
3) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ puis conclure.

Savoir déterminer u_α

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite et $\alpha \in]0;1[$.
L'objectif de cet exercice est de savoir déterminer u_α tel que $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

1) Démontrer que u_α vérifie $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
2) En déduire $u_{0{,}05}$ et $u_{0{,}01}$.

La température, en degré Celsius, à 6h du matin à La Rochelle, suit en janvier la loi normale centrée réduite.

1) Quelle température peut-on espérer avoir à 6h du matin ?
2) Est-il vrai que dans 99% des cas, la température à 6h du matin est comprise entre -2 $^\circ$ et 2 $^\circ$?
3) Dans quel intervalle centré en 0, se situe 60% des températures à 6h du matin ?
4) Quelle est la probabilité à 10^{-1} près d'avoir en janvier une température à 6h du matin supérieure à 4 $^\circ$?
