Inverse d'une matrice carrée - Exercices
Terminale Option maths expertes
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

---

1. Montrer que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Quelles valeurs faut-il donner aux réels c et d de façon à ce que C et D soient inverses ?

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ d & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (sans utiliser le déterminant).

On considère deux matrices carrées A et B de même ordre et inversibles.
Montrer que le produit AB est inversible et donner son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

Soit A une matrice carrée telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.

1. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer, en revanche, que $\mathrm{I} + \mathrm{A}$ est inversible (I désignant la matrice identité de même ordre que A).

Démontrer que si une matrice est inversible alors son inverse est unique.

Soit A une matrice carrée différente de la matrice unité, montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que si A vérifie $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ alors A n'est pas inversible.

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{A}_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels.

1. Justifier que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = (\mathrm{ad} - \mathrm{bc})\mathrm{I}_2$.
2. (a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et préciser l'inverse de A.

   (b) Réciproquement, montrer que si A est inversible alors $ad - bc \neq 0$.
3. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

   C est-elle inversible ? Si oui, donner C^{-1}. Même question pour D.

On souhaite résoudre le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ où x, y et z sont des réels.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le matrice A telle que le système $(\mathscr{S})$ soit équivalent à l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'inconnue X.
2. Vérifier que A a pour inverse la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Résoudre le système $(\mathscr{S})$.