Puissance de Matrices - Spé Maths
Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Puissance d'une matrice diagonale

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ trois réels. On considère la matrice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$.

Déterminer pour tout entier $\boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{1}$ l'expression de $\mathbf{D}^{\boldsymbol{n}}$

Méthode 1 : Raisonnement par récurrence

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier $\boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{0}$: $\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} - \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} & \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1} \\ \mathbf{2} - \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} & \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Calculer $\mathbf{A}^{n}$ en utilisant les propriétés de A

On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$.
1) Calculer $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I_2}$
2) Calculer $\mathbf{B^2}$
3) En déduire pour tout entier $\boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{0}$, l'expression de $\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Calculer $\mathbf{A}^{n}$ à l'aide d'une diagonalisation

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}8} & \mathbf{0{,}1} \\ \mathbf{0{,}2} & \mathbf{0{,}9} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$.
1) Calculer $\mathbf{P^2}$ et vérifier que $\mathbf{P}$ est inversible.
2) Vérifier que $\mathbf{D} = \mathbf{P^{-1}AP}$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
3) En déduire pour tout entier $\boldsymbol{n} \geqslant \mathbf{1}$, l'expression de $\mathbf{A}^{\boldsymbol{n}}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Matrices : un calcul de puissances par récurrence

On pose : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

1. Calculer $\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}}$, et $\boldsymbol{A}^{\mathbf{4}}$.
2. Conjecturer l'expression de $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}$ pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ non nul.
3. Démontrer votre conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Matrices : un calcul de puissances à l'aide d'une décomposition

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
   (b) Démontrer que pour tout entier n avec $n \geqslant 3$, on a : $J^n = 0_3$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$
3. En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Matrices : un calcul de puissances

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. On définit la matrice $B = Q \times A \times P$.
   Calculer B et exprimer pour n entier naturel non nul B^n en fonction de n.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $A^n = P \times B^n \times Q$.
   (b) Calculer A^n pour tout entier naturel non nul n.