Dérivation - application
Première S ES STI - Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Étude des variations d'une fonction polynôme de degré 4
Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 5$

Étude des variations d'une fonction homographique
Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+4}{1-x}$

Étude des variations d'une fonction
Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x+1}$

Minimum d'une fonction
Montrer que la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$ admet un minimum.

Montrer une inégalité
Montrer que pour tout réel x strictement positif, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Variations d'une fonction avec une fonction auxiliaire
Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x+4}$.

1. Vérifier que pour tout réel x appartenant à $]-4\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x^3+12x^2+2}{(x+4)^2}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$.
   Étudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x appartenant à $]-4\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
3. Décrire les variations de f.

Longueur minimale d'une clôture
A l'aide d'un grillage, on souhaite délimiter une surface rectangulaire de 100 m^2 adossée à un mur.
Le but de cet exercice est de trouver la longueur minimale de grillage nécessaire.

1. On pose $AB = x$ (l'unité de longueur est le mètre). Exprimer la longueur de la clôture en mètres en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{100}{x}$.
3. Déterminer la longueur de grillage minimale (arrondie au dm près) pour délimiter une surface rectangulaire de 100 m^2 adossée à ce mur.

Distance d'un point à une parabole
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. M est un point quelconque de $\mathscr{P}$ d'abscisse x et A est le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
Le but de l'exercice est de trouver la position du point M sur $\mathscr{P}$ qui minimise la distance AM. Nous admettons que ce problème revient également à minimiser le nombre AM^2.

1. Démontrer que $AM^2 = x^4 - x^2 + 1$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
   (a) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0\ ;\ +\infty[$ pour résoudre notre problème.
   (b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (d) Conclure.

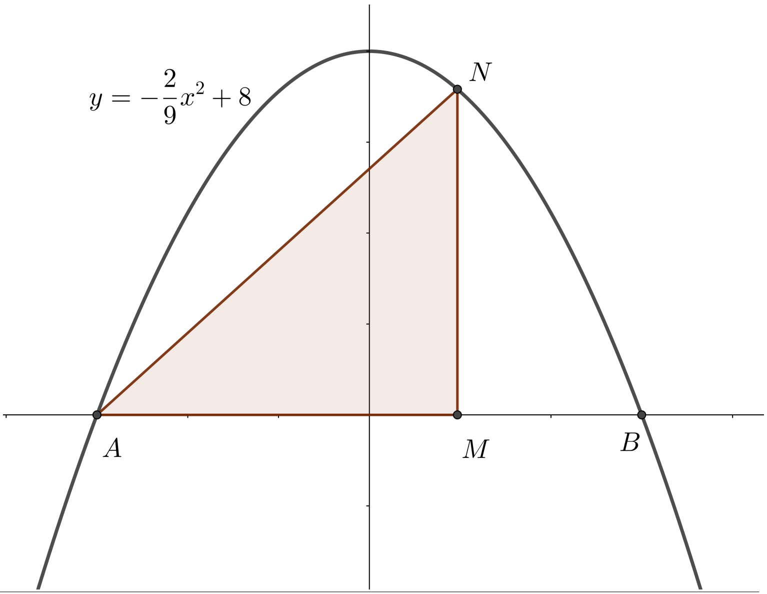
Minimiser le coût d'une boîte

Une entreprise souhaite fabriquer une boîte de 128 cm^3 de volume de la forme d'un pavé droit à base carrée. Le fond et le couvercle lui reviennent à 4 centimes le cm^2 et les faces latérales à 2 centimes le cm^2. On note x la longueur en cm du côté de la base et h la hauteur en cm de la boîte.

1. Exprimer h en fonction de x.
2. En déduire que le prix de revient en centimes est $p(x) = 8x^2 + \dfrac{1024}{x}$.
3. Étudier les variations de p sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Donner les dimensions de la boîte pour que le prix de revient soit minimal.

Aire maximale d'un triangle sous une parabole

Sur la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé la parabole d'équation $y = -\dfrac{2}{9}x^2 + 8$. Elle coupe l'axe des abscisses en A et B. Soit M un point du segment $[AB]$, la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe la parabole en N.
Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour avoir l'aire du triangle AMN maximale ?

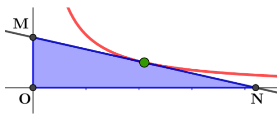


Position relative de deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 3x - 1$$

On a représenté ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_g$.



Aire constante sous une tangente

On a tracé une tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Elle coupe l'axe des ordonnées en M et celui des abscisses en N. Montrer que l'aire du triangle MNO est indépendante de la tangente tracée.