Calculs de dérivées
Première S ES STI - Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Dérivation

Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f(x)$:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

Dérivée d'un polynôme

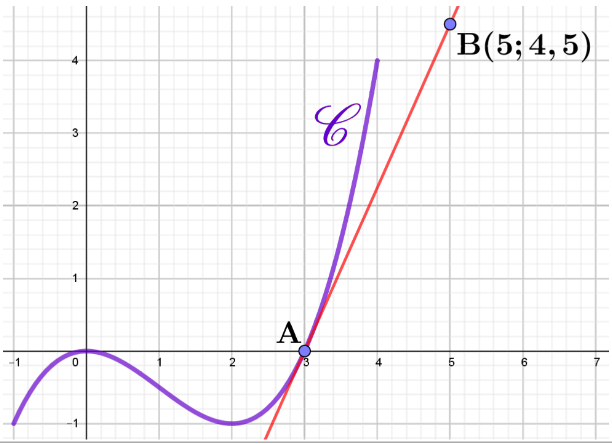
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x, $f'(x)$.

1. $f(x) = 3x^4 - \dfrac{15x^2}{2} - 5x + 3$
2. $f(x) = (4x^2 + 2)(3x - 1)$
3. $f(x) = (4x - 3)^2$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(4x^2 - 5x + 1)$

Dérivée graphiquement et par le calcul - $f'(x) > 0$

On a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 4]$.
La droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ en A.

1. A l'aide du graphique :
   a) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$, $f'(3)$.
   b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.
   c) Résoudre $f'(x) \geqslant 0$.
2. Retrouver ces résultats par le calcul sachant que $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2$.



Dérivée d'un produit - Dérivation et racine

Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = (3x + 1)(x^2 + x)$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x}$ et $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$

Dérivée d'un quotient

Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3}$ et $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{3x}{4} - 2 + \dfrac{5}{x^2}$ et $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[$

Dérivée d'un quotient
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ et $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{2}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{1-x}$ et $\mathcal{D}_f =]-\infty;1[$

Dérivée d'un quotient
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = \dfrac{5}{x-4}$ et $\mathcal{D}_f =]4;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{5x}{x-4}$ et $\mathcal{D}_f =]4;+\infty[$

Dérivée et racine carrée
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et calculer pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$.

1. $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{x}$
2. $f(x) = 6x\sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x}}$

Dériver une fonction
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.

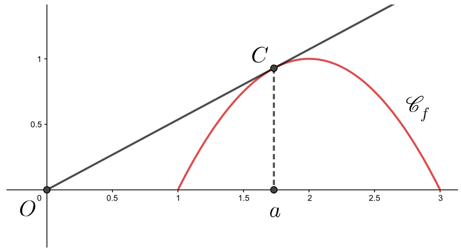
1. $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - x + 7$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2x-4}$ avec $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Erreur classique à éviter de faire sur la dérivation
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner pour tout réel x avec $x > 0$, l'expression de $f'(x)$.
2. f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
3. Ce résultat était-il prévisible ?

Dérivation - Tangente passant par un point donné
Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,3]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère d'origine O.

Cet arc de parabole symbolise une colline (une unité sur le repère représente un hectomètre dans la réalité) et l'axe des abscisses représente le sol. Un observateur est placé à l'origine. Il cherche du regard le point C qui est le point le plus haut de la colline visible. On note a l'abscisse de C.



1. Montrer que $\dfrac{f(a)}{a} = f'(a)$.
2. En déduire la hauteur en mètres (par rapport au sol) du point C.

Dérivation - Tangentes parallèles

On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout réel a, les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont parallèles.
2. $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes horizontales ?

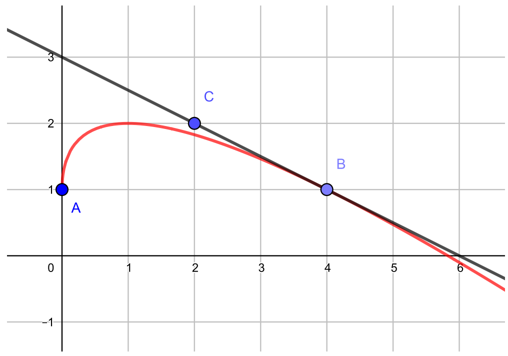
Dérivation - Tangente parallèle à une droite donnée

On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction carré dans un repère. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{5}{2}x - 4$.

Dérivation - Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ...$

On a représenté graphiquement une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax + b\sqrt{x} + c$ où a, b et c sont trois réels à déterminer. La courbe passe par les points A$(0\ ;\ 1)$ et B$(4\ ;\ 1)$. La droite (BC) est tangente à la courbe au point B. On donne aussi C$(2\ ;\ 2)$.

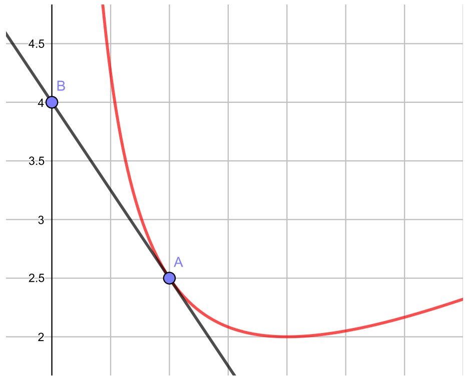
1. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Déterminer $f(0)$, $f(4)$ et $f'(4)$.
3. Déduire des informations précédentes les réels a, b et c.
4. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Vérifier par le calcul.



Dérivation - Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ...$

On a représenté graphiquement une fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ où a et b sont deux réels à déterminer. La courbe passe par le point A$\left(1\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$. La droite (AB) est tangente à la courbe au point A. On donne aussi B$(0\ ;\ 4)$.

1. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Déduire des informations précédentes les réels a et b.
4. Résoudre par lecture graphique l'équation $f'(x) = 0$ puis vérifier par le calcul.



Dérivation - Tangente commune à 2 paraboles
Déterminer une équation de l'unique tangente commune aux courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

Dérivation - Paraboles tangentes
On considère les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

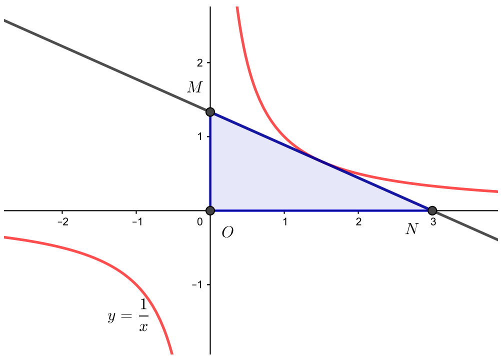
$$f_1(x) = -x^2 + 6x - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2 + 2x$$

On note $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les paraboles représentatives de f_1 et f_2.
Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont tangentes.
Deux paraboles sont dites tangentes lorsqu'elles ont un point commun et une tangente commune en ce point.

Dérivation - tangentes passant par un point donné
On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction carré dans un repère. Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{P}$ passant par le point $A(-1\ ;\ -3)$.

Un triangle d'aire constante

On a tracé une tangente à la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. Elle coupe l'axe des ordonnées en M et celui des abscisses en N. Montrer que l'aire du triangle MNO est indépendante de la tangente tracée.



Démonstration de la dérivée de $f(x) = k$ - Dérivée d'une constante
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ où k est une constante réelle.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = 0$.
2. Ce résultat était-il prévisible ?

Démonstration de la dérivée de $f(x) = x$

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = 1$.
2. Ce résultat était-il prévisible ?

Démonstration de la dérivée de x^2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

1. À l'aide du taux d'accroissement.
2. À l'aide de la formule de dérivée d'un produit.

Comprendre la formule de la dérivée de x^n

1. En utilisant la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions, compléter le tableau ci-contre.
2. Soit n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$. Conjecturer l'expression de $f'(x)$.

$f(x)$	$f'(x)$	f étant dérivable sur
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3		
x^4		

Démonstration de la dérivée de $\dfrac{1}{x}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer à l'aide du taux d'accroissement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout réel x non nul,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Démonstration de la dérivée de racine de x

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. Démontrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Ce dernier résultat était-il prévisible ?
