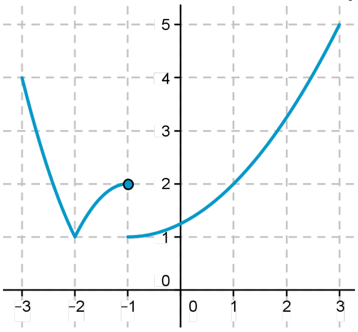
Continuité - Théorème des valeurs intermédiaires : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Reconnaitre une fonction continue

On a tracé la courbe d'une fonction f définie sur [-3 ;3].



1°) La fonction est-elle continue :
a) en -3 b) en -2 c) en -1 d) en 3.
2°) La fonction est-elle continue sur :
a) [-3 ;1] b) [-3 ;-2] c) [-3 ;-1[d) [-2 ;-1] e) [-1 ;3] f)]-1 ;3].

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 6 - x^3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Utiliser un tableau de variations pour connaitre le nombre de solution d'une équation

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

x	$-\infty$		-3		-1	1	4		$+\infty$
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘ -3 ↗	0	↗	4

1°) Comparer si possible :
a) $f(-5)$ et $f(2)$ b) $f(-5)$ et $f(0)$ c) $f(-2)$ et $f(3)$
2°) Dans chaque cas, déterminer le nombre de solutions de l'équation :
a) $f(x) = -2$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -4$ d) $f(x) - 5 = 0$
3°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, selon les valeurs de k.
4°) Déterminer le signe de $f(x)$.
5°) Dans chaque cas, déterminer l'image par f de l'intervalle :
a) $]-\infty; -3[$ b) $]-3; +\infty[$ c) $]-3; 4[$
6°) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

Théorème des valeurs intermédiaires et équations

1°) Montrer que l'équation $x^3 = 2$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.
2°) Montrer que l'équation $x^3 = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_0.
3°) Déterminer un encadrement de x_0 à 10^{-1} près.

1°) Démontrer que l'équation $x^3 - 3x = 3$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2°) Démontrer que l'équation $x^3 - 3x = 3$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3°) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x = k$, selon les valeurs de k.

Théorème des valeurs intermédiaires et équations
1°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $3x^4 + 4x^3 = 12x^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$.
2°) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions.

Algorithme - Solution d'une équation par balayage
1) Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2) Écrire un algorithme pour déterminer par **balayage** un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Algorithme - Solution d'une équation par dichotomie
Soit f une fonction continue strictement croissante sur $[a; b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[a; b]$.

1. Écrire un algorithme pour déterminer par **dichotomie** un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
2. Application :
   a) Justifier que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer par dichotomie, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Généraliser l'algorithme de dichotomie à une fonction strictement monotone.

Théorème des valeurs intermédiaires et équations avec des racines
1°) Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = 1 - x^2$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
2°) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Nombre de solution de l'équation $f(x) = k$
L'objectif de cet exercice est de dénombrer le nombre de solutions de l'équation $2x^3 + 3x^2 + 1 = k$
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$
1°) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3°) Démontrer que l'équation $2x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α.
Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.
4°) Démontrer que l'équation $2x^3 + 3x^2 = 1$ admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$.
5°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, selon les valeurs de k.

---

1) Déterminer le nombre de solution de l'équation $x^4 + 4x^3 = 1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que l'équation $x^4 + 4x^3 = 0$ admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$:
   a) A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.
   b) Sans utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
3) Peut-on appliquer la méthode du 2)b) à la question 1) ? Justifier.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
1°) Étudier les variations de f.
2°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, selon les valeurs de k

---

Théorème des valeurs intermédiaires pour étudier la dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

1°) Pour tout réel $x \neq -1$, déterminer $f'(x)$.

2°) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^3 - 3x + 2$.

a) Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que $0.5 < \alpha < 0.6$

e) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3°) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Théorème des valeurs intermédiaires et suite

Soit un entier $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$

1°) Démontrer que l'équation $x + x^2 + ... + x^n = 1$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$. On note a_n cette solution.

2°) On a tracé les courbes des fonctions f_2, f_3, f_4, f_{20}.
Déterminer graphiquement une valeur approchée de a_2, a_3, a_4, a_{20}.
Conjecturer le sens de variation de (a_n) et sa limite.

3°) Déterminer la valeur exacte de a_2.

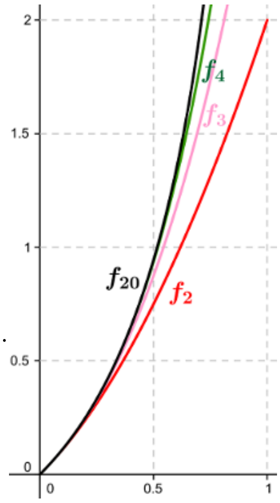
4°) Pour $x \in [0;1]$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

5°) Démontrer que pour $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) \geq 1$. En déduire le sens de variation de (a_n).

6°) Justifier que pour $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \dfrac{3}{4}$

7°) En déduire que la suite (a_n) converge. On note ℓ sa limite.

8°) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \dfrac{1}{1-\ell} - 1$. En déduire la valeur de ℓ.



Problème ouvert

Soit f une fonction définie et continue sur $[0\,;1]$ telle que pour tout x de $[0\,;1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
Montrer qu'il existe au moins un nombre a de $[0\,;1]$ tel que $f(a) = a$.

Problème ouvert

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) $\cos x = x$.
Donner un encadrement de chacune de ces solutions à 0,01 près.

Problème ouvert

Dénombrer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) $\sin x = x^2$.
