Géométrie dans l'espace
Représentation paramétrique : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

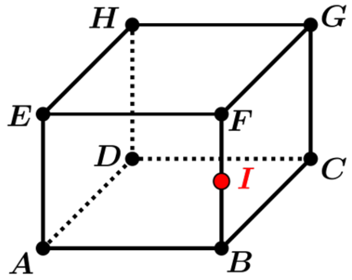
Représentation paramétrique d'une droite

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [BF].
On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1) Préciser l'ensemble des points M$(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Tracer cet ensemble sur la figure.

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DI).



L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points A(1 ;-1 ;4) et B(-1 ;3 ;2).
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) Le point C(5 ;8 ;9) appartient-il à la droite (AB) ? Justifier.
3) La droite (AB) admet-elle pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 8t \\ z = 4t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. Justifier.
4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

Position relative de deux droites

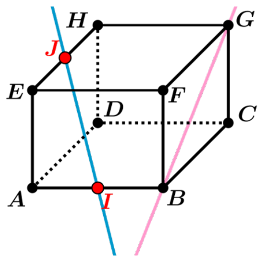
L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques :

$$D_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = -4 + 3s \\ z = -1 + s \end{cases} \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

1) D_1 et D_2 sont-elles parallèles ? Justifier.
2) D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
On considère les points A(0 ;-2 ;7), B(1 ;-3 ;10), C(1 ;3 ;2), D(-3 ;1 ;3).
Étudier la position relative des droites (AB) et (CD).

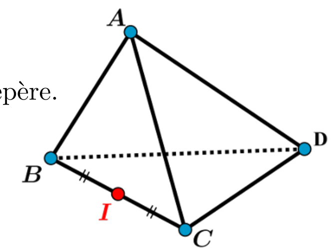
ABCDEFGH est un cube.
I est le milieu de [AB] et J celui de [EH].
les droites (IJ) et (BG) sont-elles coplanaires ? Justifier.



Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
1) Justifier que les points A(1 ;2 ;-1), B(4 ;0 ;1), C(2 ;1 ;1) définissent un plan.
2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
3) Le point M(5 ;-4 ;2) appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

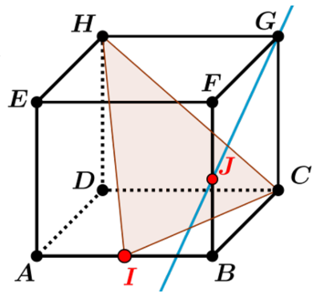
ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [BC].
On considère le point M défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD}$.
1) Démontrer que le point M appartient au plan (ACD) sans utiliser de repère.
2) Refaire la question 1) en utilisant un repère bien choisi.



Position relative d'une droite et d'un plan

ABCDEFGH est un cube. I, J sont les milieux respectifs de [AB] et [BF].

1) Démontrer que la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC).
   à l'aide d'une décomposition.
2) Refaire la question 1) à l'aide d'un repère judicieusement choisi.



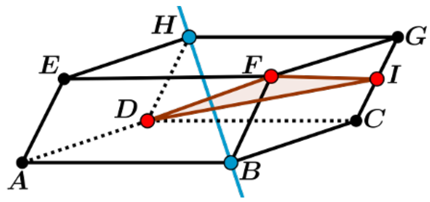
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points A(1 ;1 ;2), B(-1 ;2 ;1), C(0 ;1 ;1), D(1 ;2 ;3), E(2 ;0 ;2).

1) Justifier que les points C, D et E définissent un plan.
2) La droite (AB) est-elle incluse dans le plan (CDE) ?

Intersection d'une droite et d'un plan

ABCDEFGH est un parallélépipède. I est le milieu de [CG].

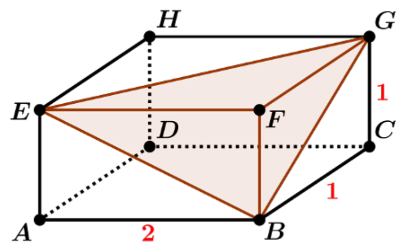
1) Justifier que les points D, F et I définissent un plan.
2) Démontrer que la droite (BH) et le plan (DFI) sont sécants
   en un point K dont on donnera les coordonnées.



distance d'un point à un plan et volume d'un tétraèdre

ABCDEFGH est parallélépipède rectangle tel que AB=2 et AD=AE=1.

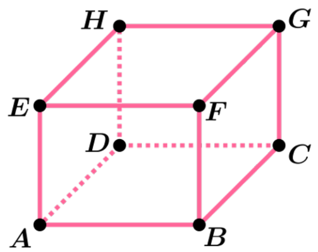
1) Déterminer le volume V du tétraèdre EFGB.
2) Démontrer que le triangle EBG est isocèle.
3) En calculant d'une autre manière, le volume V,
   en déduire la distance de F au plan EBG.



Déterminer un lieu de points

ABCDEFGH est un cube.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit les points M et N par :
   $\overrightarrow{\text{HM}} = t\ \overrightarrow{\text{HA}}$ et $\overrightarrow{\text{DN}} = t\ \overrightarrow{\text{DB}}$.

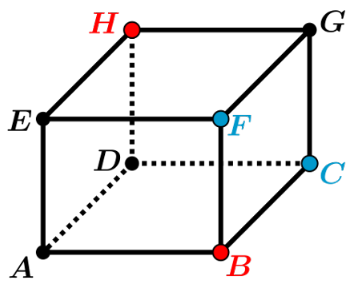
1) Que décrivent les points M et N lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
2) On appelle I le milieu de [MN].
   Que décrit le point I lorsque t décrit $\mathbb{R}$? Justifier.
3) Représenter sur la figure le lieu des points I lorsque t décrit $\mathbb{R}$.



Distance minimale

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
Pour tout $k \in [0;1]$, on définit les points M et N par :
   $\overrightarrow{\text{HM}} = k\ \overrightarrow{\text{HB}}$ et $\overrightarrow{\text{CN}} = k\ \overrightarrow{\text{CF}}$.

1) Que décrivent les points M et N lorsque k décrit l'intervalle [0 ;1] ?
2) On se place dans le repère $(\text{A};\overrightarrow{\text{AB}};\overrightarrow{\text{AD}};\overrightarrow{\text{AE}})$.
   Déterminer les coordonnées des points M et N en fonction de k.
3) Pour quelle valeur de k la distance MN est-elle minimale ? Justifier.



Angle minimum

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [CD].

M est un point quelconque du segment [EC]. On se place dans le repère orthonormal $(\text{A}; \overrightarrow{\text{AB}}; \overrightarrow{\text{AD}}; \overrightarrow{\text{AE}})$.

1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Justifier que les coordonnées de M peuvent s'écrire $(1-t\,;1-t\,;t)$ où t appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

3) Démontrer que le triangle IMJ est isocèle en M.

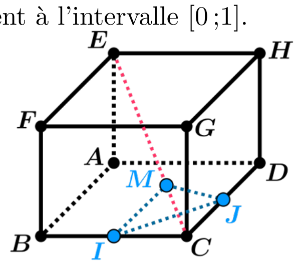
4) Exprimer IM^2 en fonction de t.

5) On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$. On admet que $\alpha \in [0; \pi]$.
Démontrer que α est maximum lorsque $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ est maximal.

6) En déduire que α est maximum lorsque la longueur IM est minimale.

7) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(t) = 3t^2 - t + \dfrac{1}{4}$.

8) En déduire qu'il existe un unique point M_0 de [EC] tel que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.



Géométrie dans l'espace et Physique : vitesse et déplacement

On observe deux sous-marins se déplaçant chacun en ligne droite et à vitesse constante. On se place dans un repère orthonormé $(\text{O}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ dont l'unité est le mètre. Le plan $(\text{O}; \vec{i}; \vec{j})$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer et négative sous l'eau. A chaque instant $t \geqslant 0$, exprimé en minute, le premier sous-marin est repéré par le point $\text{S}_1(t)$ de coordonnées $\begin{cases} x(t) &= 140 - 60t \\ y(t) &= 105 - 90t \\ z(t) &= -170 - 30t \end{cases}$.

1. Déterminer la vitesse du premier sous-marin.
2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire de ce sous-marin avec le plan horizontal. On arrondira à 0,1 degré près.
3. A chaque instant $t \geqslant 0$, le second sous-marin est repéré par le point $\text{S}_2(t)$.
   On sait que $\text{S}_2(0)$ et $\text{S}_2(3)$ ont pour coordonnées respectives $(68; 135; -68)$ et $(-202; -405; -248)$.
   A quel instant t exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?
