Théorème de Bézout - Spé maths - Terminale S : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Théorème de Bézout : déterminer les coefficients u et v

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que 368 et 117 sont premiers entre eux.
2. En déduire deux entiers u et v tels que $368u + 117v = 1$.

Théorème de Bézout : a et b^2 premiers entre eux

Soient a et b deux entiers naturels (tous deux non nuls).

1. Montrer à l'aide du théorème de Bézout que si a et b^2 sont premiers entre eux alors a et b sont premiers entre eux.
2. Montrer (toujours à l'aide du théorème de Bézout) que réciproquement, si a et b sont premiers entre eux alors a et b^2 sont premiers entre eux.

Théorème de Bézout : montrer que deux entiers sont premiers entre eux

Montrer que pour tout entier n, les entiers $2n^2 + 10n + 13$ et $n + 3$ sont premiers entre eux.

Inverse modulo n et application aux équations

On dit qu'un entier a admet un inverse modulo n s'il existe un entier b tel que $ab \equiv 1\ [n]$.
1) Démontrer que a admet un inverse modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux.
2) Application :
   a) 7 admet-il un inverse modulo 22 ? Dans l'affirmative, en donner un.
   b) Résoudre $7x \equiv 5\ [22]$.

Théorème de Bézout : inverse modulo n

Soient a et n deux entiers non nuls, on dit que a admet un inverse modulo n ou encore qu'il est inversible modulo n s'il existe un entier b tel que :

$$ab \equiv 1\ [n]$$

1. Montrer que a est inversible modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux.
2. Montrer que si a est inversible modulo n, il existe un unique entier r compris entre 1 et $n-1$ tel que $ar \equiv 1\ [n]$. On dit alors que r est l'inverse de a modulo n
3. 15 est-il inversible modulo 26 ? Si oui, déterminer son inverse. Même question avec 8.

PGCD et Bézout

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls avec a et c premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{PGCD}(a; bc) = \mathrm{PGCD}(a; b)$.

Détermination d'un PGCD

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ supérieur ou égal à $\mathbf{5}$, on considère les deux entiers $\boldsymbol{a = n^3 - n^2 - 12n}$ et $\boldsymbol{b = 2n^2 - 7n - 4}$.

1. Montrer que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont divisibles par $\boldsymbol{n-4}$.
2. On pose $\boldsymbol{\alpha = 2n+1}$ et $\boldsymbol{\beta = n+3}$ et on note $\boldsymbol{d}$ le PGCD de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.
   (a) Etablir une relation entre $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ indépendante de $\boldsymbol{n}$.
   (b) Démontrer que $\boldsymbol{d}$ est un diviseur de $\mathbf{5}$.
   (c) Démontrer que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont divisibles par $\mathbf{5}$ si et seulement si $\boldsymbol{n-2}$ est divisible par $\mathbf{5}$.
3. Montrer que $\boldsymbol{2n+1}$ et $\boldsymbol{n}$ sont premiers entre eux.
4. Discuter en fonction de $\boldsymbol{n}$ du PGCD de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.
5. Vérifier vos résultats pour $\boldsymbol{n = 11}$ et $\boldsymbol{n = 12}$.