PGCD arithmétique - Spé maths - Terminale S : Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Déterminer le PGCD à l'aide de la décomposition en facteurs premiers

Déterminer le **PGCD** de **4480** et **400** à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Déterminer le PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide

Déterminer le **PGCD** de **3045** et **300** à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

PGCD : calcul avec un paramètre

Pour tout entier naturel non nul, on pose $\boldsymbol{a = 5n+1}$ et $\boldsymbol{b = 2n-1}$. On note $\boldsymbol{\Delta} = \text{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b})$.

1. Démontrer que les valeurs possibles de $\boldsymbol{\Delta}$ sont 1 ou 7.
2. Déterminer les entiers $\boldsymbol{n}$ tels que $\boldsymbol{a \equiv 0}\,[\boldsymbol{7}]$ et $\boldsymbol{b \equiv 0}\,[\boldsymbol{7}]$.
3. En déduire, suivant les valeurs de $\boldsymbol{n}$, la valeur de $\boldsymbol{\Delta}$.

PGCD$(a;b)$ = PGCD$(b;r)$ et Application

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers tels que $\boldsymbol{0 < b \leqslant a}$. Démontrer que :
$\boldsymbol{\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)}$ où $\boldsymbol{r}$ est le reste dans la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$.

PGCD : l'algorithme d'Euclide

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels, on note $\mathscr{D}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b})$ l'ensemble des diviseurs communs à $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.
Dans la suite, on considère que $\boldsymbol{a \geqslant b > 0}$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{D}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{a-b}\ ;\ \boldsymbol{b})$.
   (b) En déduire que $\text{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \text{PGCD}(\boldsymbol{a-b}\ ;\ \boldsymbol{b})$.
2. Soit $\boldsymbol{r}$ le reste dans la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$, montrer, en vous aidant de la question précédente, que $\text{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \text{PGCD}(\boldsymbol{r}\ ;\ \boldsymbol{b})$.
3. En vous aidant des divisions euclidiennes ci-dessous, déterminer : $\text{PGCD}(\boldsymbol{416}\ ;\ \boldsymbol{182})$.
   $\boldsymbol{416 = 2 \times 182 + 52}$
   $\boldsymbol{182 = 3 \times 52 + 26}$
   $\boldsymbol{52 = 2 \times 26 + 0}$
4. Ecrire en langage naturel un algorithme permettant de déterminer le PGCD de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

PGCD : utiliser la caractérisation d'un PGCD

Trouver les entiers naturels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a < b}$ tels que : $\boldsymbol{ab = 7\,776}$ et $\text{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{18}$

PGCD : diviseurs communs

Si on divise $\boldsymbol{4\,294}$ et $\boldsymbol{3\,521}$ par un même entier naturel non nul $\boldsymbol{n}$, les restes respectifs sont $\boldsymbol{10}$ et $\boldsymbol{11}$. Quel est cet entier ?

PGCD : un PGCD égal à la différence

Soient a et b deux entiers naturels avec $a > b > 0$, montrer que PGCD$(a\ ;\ b) = a - b$ si et seulement si, il existe un entier k tel que $a = (k+1)(a-b)$ et $b = k(a-b)$.

PGCD : la boîte de cubes

Une boîte parallélépipédique rectangle de dimensions intérieures $31{,}2$ cm, 13 cm et $7{,}8$ cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres.
Quel est le nombre minimal de cubes que peut contenir cette boîte ?

Nombres premiers : PGCD et PPCM

On pose $a = 588$ et $b = 616$.

1. Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. En déduire PGCD$(a\ ;\ b)$.
3. Déduire également de la première question PPCM$(a\ ;\ b)$ (c'est à dire le plus petit multiple commun à a et à b).

PGCD et suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.
2. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
3. Calculer PGCD$(4^{n+1} - 1\ ;\ 4^n - 1)$.

Nombres de Fermat et infinitude des nombres premiers

On rappelle que les *nombres de Fermat* sont les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec n un entier naturel.

1. Etablir que pour tous entiers naturels n et k, on a : $F_{n+k} - 1 = (F_n - 1)^{2^k}$.
2. En déduire que si k est un entier naturel non nul alors pour tout entier naturel n, on a :

$$F_{n+k} \equiv 2\,[F_n]$$

3. En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
4. Retrouver alors qu'il existe une infinité de nombres premiers.